# REVISTA

DE LA

# ACADEMIA DE CIENCIAS

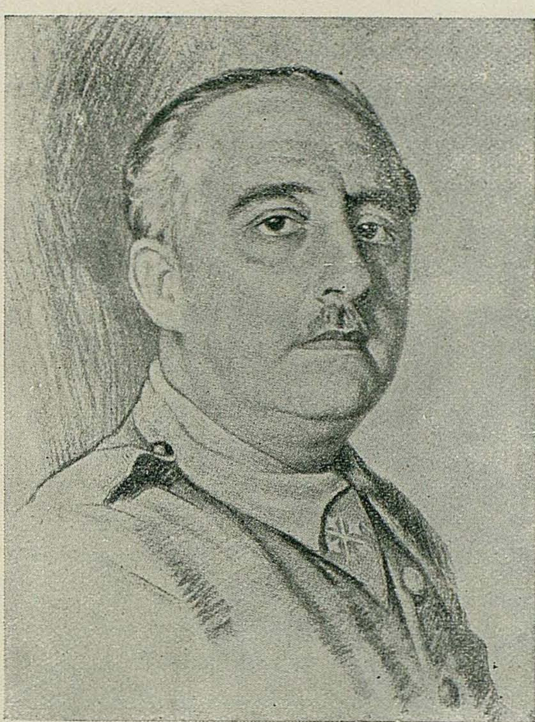
EXACTAS, FISICO-QUIMICAS Y NATURALES

DE

# ZARAGOZA

SERIE 2.ª TOMO I

1946



# A S. E. EL JEFE DEL ESTADO

*Esta Corporación Científica dejó de hacer una vida activa el día mismo que se inició el Glorioso Movimiento Nacional, después de un acto de adhesión al mismo y de entregar sus fondos a la suscripción nacional. Al volver a la normalidad, merced a la victoria alcanzada por Vuestra Excelencia al frente del heroico Ejército a sus órdenes, esta Academia se encontró reducida por numerosas y muy lamentables defunciones y por traslados, a ocho únicos miembros de los 30 puestos estatutarios.*

*Largo ha sido el período de relativa inacción; penosamente se han reunido nuevos nombres de Académicos en personas de relevante mérito, originales para las publicaciones y fondos para editarlas.*

*Hoy, por fin, podemos ofrecer a Vuestra Excelencia los primeros frutos de nuestro trabajo publicando este primer número de la segunda serie de la Revista, al mismo tiempo que un tomo de las "Memorias" con un trascendental estudio de alta matemática.*

*Con esta dedicación expresamos y reiteramos a Vuestra Excelencia nuestro respeto y nuestra más ferviente adhesión. Sabemos que sólo con la paz y la vida digna es fecunda la labor de todo orden, y singularmente la recoleta de la investigación científica; una y otra se las debemos al Caudillo vencedor de la cruzada de liberación y a sus dotes singulares de gobernante en asuntos interiores y en los escabrosos problemas internacionales. Debemos, pues, todas las personas de buena voluntad aunar nuestras energías en apoyo de vuestro esfuerzo, en defensa de la dignidad y de la independencia de la Patria.*

# INDICE

# INDICE

## DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TOMO

# Sobre los postulados de ordenación del espacio proyectivo de Steinitz-Rademacher

por PEDRO ABELLANAS

El objeto de esta nota es demostrar que el tercer postulado de ordenación del espacio proyectivo dado por Steintz-Rademader (1) es consecuencia de los restantes y de los postulados de incidencia.

1. — Postulados de ordenación del espacio proyectivo.

Entre los puntos de una serie rectilínea del espacio proyectivo existe una relación llamada *separarse* caracterizada por los siguientes postulados:

*Postulado* $O_1$. — Si $A$, $B$, $C$ son tres puntos de una serie rectilínea, existen dos puntos $D_1$ y $D_2$ en la misma, distintos entre sí y de $A$, $B$ y $C$, tales que $A$ y $B$ están separados por $C$ y $D_1$ y no lo están por $C$ y $D_2$.

*Postulado* $O_2$. — Si $A$, $B$, $C$, $D$ son puntos distintos de una serie rectilínea y $A$, $B$ separan a $C, D$, $A, C$ y $A, D$ no separan a $B, D$ y $B, C$, respectivamente. Recíprocamente, si $A, C$ y $A, D$ no separan a $B, D$ y $B, C$, respectivamente, $A, B$ y $C, D$ se separan.

*Postulado* $O_3$. — Si $A, B$ separan a $C, D$, $A, B$ separan a $D, C$ y $B, A$ separan a $C, D$ y a $D, C$.

Notación 1. — Si los pares $A, B$ y $C, D$ se separan, escribiremos $(A, B; C, D) = -1$ y si no se separan: $(A, B; C, D) = +1$.

En virtud del postulado $O_2$, resulta:

$$(A, B ; CD)\ (A, C ; BD)\ (A, D ; BC) = -1.$$

Definición 1. — Si los puntos $A$ y $B$ no pertenecen a las rectas $r$, $j$ y ponemos $AB \frown r = C$ y $AB \frown j = D$, se dice que los puntos $A$ y $B$ $\left\{\begin{array}{l}\text{separan}\\ \text{no separan}\end{array}\right.$ a las rectas $r$, $j$ cuando los puntos $A, B$ $\left\{\begin{array}{l}\text{separan}\\ \text{no separan}\end{array}\right.$ a los puntos $C$, $D$.

(1) Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Springer - 1934.

Notación 2. — Si $A, B$ separan a $r, j$ escribiremos $(A, B \; ; \; r, j) = -1$ y en caso contrario $(A, B \; ; \; r, j) = +1$.

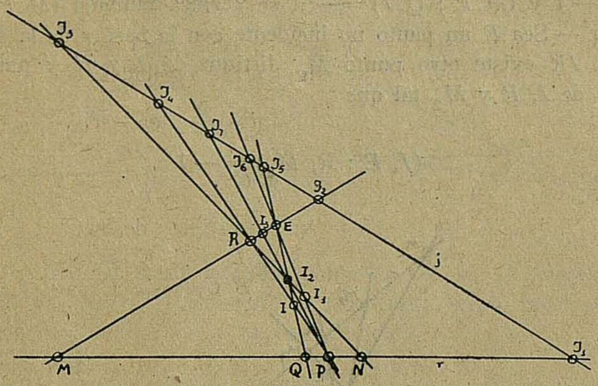
*Postulado* $O_4$. —Si $A_1$, $A_2$, $A_3$ es un trivértice de un plano $\pi$ y $r$, $j$ dos rectas de $\pi$ no incidentes con ninguno de los vértices, se verifica

$$(A_1, A_2 \; ; \; r, j) \; (A_2, A_3 \; ; \; r, j) \; (A_3, A_1 \; ; \; r, j) = +1.$$

2. — Definición de los segmentos proyectivos

*Lema* 1. — Si $M$, $N$, $P$, $Q$, $J_1$ son puntos distintos de una serie rectilínea de base $r$ y se verifica $(M, N \; ; PJ_1) = -1$ y $(MP \; ; QJ_1) = -1$, se verifica $(M, N \; ; QJ_1) = -1$.

*Demostración.* — Sean: $\pi$ un plano incidente con $r$ y $R$ un punto de $\pi$ no incidente con $r$. En la recta $RM$ existe un punto $J_2$ distinto de $M$ y $R$. Por, $O_1$, existe un punto $E$ distinto de los anteriores tal que $(ME \; ; RJ_2) = -1$. Llamemos $j$ a la recta $J_1 J_2$. En el trivértice $MPR$ y respecto de las rectas $j$ y $QE$ y en virtud de las relaciones: $(M, P \; ; Q, J_1) = -1$ y $(M, R \; ; EJ_2) = 1$, que se verifican por hipótesis y por construcción, respectivamente, resulta, en virtud de $O_4$, que $(PR \; ; IJ_4) = -1$. De modo análogo se procede en los siguientes casos, que indicaremos en esquema:




En el trivértice $M$, $E$, $Q$, respecto de $j$ y $RP$ y en virtud de $(M, E \; ; RJ_2) = -1$ y $(MQ \; ; PJ_1) = +1 \xrightarrow{O_4} (QE \; ; IJ_5) = -1$.

En el trivértice $\{M, E, P\}$, respecto de $j$ y $RN$ de $(ME \; ; RJ_2) = -1$, $(MP \; ; NJ_1) = +1 \xrightarrow{O_4} (EP \; ; I_1, J_6) = -1$.

En $\{E, I, P\}$, respecto de $j$ y $RN$ y de las relaciones $(IP \; ; RJ_4) = +1$, $(EP \; ; IJ_6) = -1 \xrightarrow{O_4} (IE \; ; I_2 J_5) = -1$.

En $\{R, I, E\}$, respecto de $j$ y $PI_2$ y de las relaciones $(IE\ ;\ I_2 J_5) = -1$, $(R, I\ ;\ PJ_4) = +1 \xrightarrow{O_4} (RE\ ;\ I_3 J_2) = -1$.

En $\{E, I_3, P\}$, respecto de $j$ y $RN$ y de las relaciones $(EI_3\ ;\ RJ_2) = +1$, $(EP\ ;\ I_1 J_6) = -1 \xrightarrow{O_4} (PI_3\ ;\ I_2 J_7) = -1$.

En $\{M, I_3, P\}$, respecto de $j$ y $RN$ y de las relaciones $(MP\ ;\ NJ_1) = +1$, $(PI_3\ ;\ I_2 J_7) = -1 \xrightarrow{O_4} (MI_3\ ;\ RJ_2) = -1$.

En $\{M, R, N\}$, respecto de $j$ y $PI_3$ y de las relaciones $(MR\ ;\ I_3 J_2) = +1$, $(M, N\ ;\ P, J_1) = -1 \xrightarrow{O_4} (RN\ ;\ I_2 J_3) = -1$.

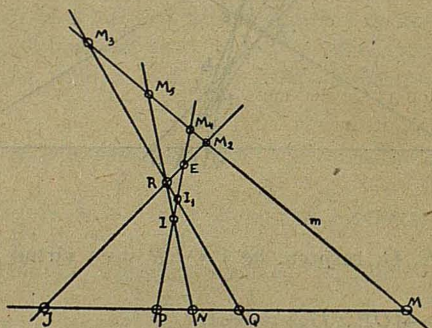
En $\{M, R, N\}$, respecto de $j$ y $EQ$ y en virtud de las relaciones $(MR\ ;\ EJ_2) = +1$, $(R, N\ ;\ I_2, J_3) = -1 \xrightarrow{O_4} (M, N\ ;\ Q, J_1) = -1$.

*c. q. d.*

*Lema* 2. — Si $M$, $N$, $P$, $Q$, $J$ son puntos de una serie rectilínea y se verifica $(M, P\ ;\ N, J) = -1$ y $(M, P\ ;\ Q, J) = -1$, se verifica también $(M, P\ ;\ N, Q) = +1$.

Demostración. — Sea $R$ un punto no incidente con la base $r$ de la serie y $\pi$ el plano $Rr$. En la recta $JR$ existe otro punto $M_2$ distinto de $J$ y $R$ y por $O_1$ existe otro punto $E$ distinto de $J$, $R$ y $M_2$ tal que

$$(J, E\ ;\ R, M_2) = -1$$




La recta $PE$ no pasa por $J$, $R$, $N$ ni $Q$. Llamemos $m$ a la recta $M M_2$. Esta recta no incide tampoco con ninguno de dichos puntos, luego:

a) En el trivértice $\{J, R, N\}$, respecto de las rectas $m$ y $PE$ y en virtud de las relaciones $(J, N\ ;\ P, M) = -1$, $(J, R\ ;\ E, M_2) = +1 \xrightarrow{O_4} (R, N\ ;\ IM_5) = -1$.

b) En el trivértice $\{J, R, Q\}$, respecto de $m$ y $PE$ y en virtud de $(J, R; E, M_2) = +1$,

$$(J, Q\ ;\ P, M) = -1 \xrightarrow{O_4} (R, Q\ ;\ I_1, M_3) = -1.$$

c) En el trivértice $\{N, R, Q\}$, respecto de $m$ y $PE$ y en virtud de $(N, R; I, M_5) = -1$,

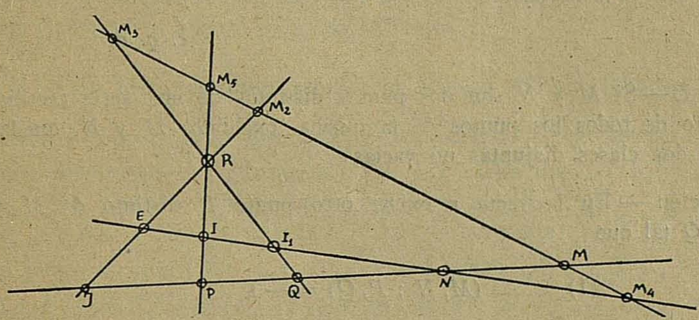
$$(Q, R\ ;\ I_1, M_3) = -1 \xrightarrow{O_4} (N, Q\ ;\ P, M) = +1.$$

*c. q. d.*

*Lema* 3. — (Tercer postulado de ordenación de Steinitz-Rademacher). — Si $M$, $N$, $P$, $Q$, $J$ son puntos de una serie rectilínea de base $d$ y se verifica: $(M, N\ ;\ JP) = +1$, $(M, N\ ;\ J, Q) = +1$ o bien, $(M, P\ ;\ N, J) = -1$ y $(M, Q\ ;\ N, J) = -1$, se verifica también $(M, N\ ;\ P, Q) = +1$.

Demostración. — $R$, $M_2$, $m$ y $\pi$ tienen el mismo significado que en el lema anterior. $E$ se determina con la condición:

$$(J, R\ ;\ E, M_2) = -1.$$




Las rectas $m$ y $NE$ no pasan por los puntos $J$, $R$, $P$, $Q$. Obsérvese que de las segundas hipótesis del lema se deducen las primeras; luego éstas son más amplias que aquéllas y podemos limitarnos a su consideración.

a) En el trivértice $\{J, R, P\}$, respecto de $m$ y $NE$ y en virtud de $(J, P; N, M) = +1$ y $(J, R\ ;\ E, M_2) = -1$, resulta $(P, R\ ;\ IM_5) = -1$.

b) En el trivértice $\{J, R, Q\}$, respecto de $m$ y $NE$, de $(J, R\ ;\ E, M_2) = -1$,

$$(J, Q\ ;\ N, M) = +1 \xrightarrow{O_4} (R, Q\ ;\ I_1, M_3) = -1.$$

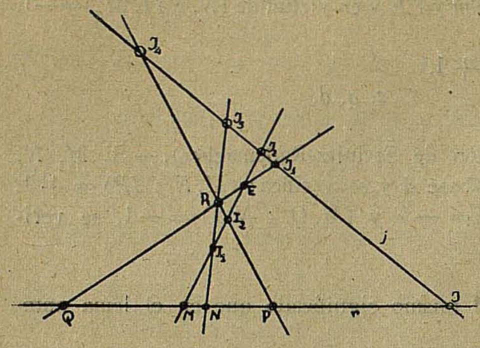
c) En $\{P, R, Q\}$, respecto de $m$ y $NE$, de $(P, R; I, M_5) = -1$, $(Q, R; I_1, M_3) = -1$, resulta que $(P, Q\ ;\ M, N) = +1$.

*c. q. d.*

*Lema* 4. — Si $M$, $N$, $P$, $Q$, $J$ son puntos distintos de una serie rectilínea $r$ y se verifica: $(M, P\ ;\ N, J) = -1$, $(N, Q\ ;\ M, J) = -1$, se verifica también $(P, Q\ ;\ M, J) = -1$.

Demostración. — En la recta $RQ$ existe un punto $J_1$ distinto de $R$ y $Q$ y un punto $E$ tal que

$$(Q, E\ ;\ R, J_1) = -1.$$




Las rectas $ME$ y $j \equiv JJ_1$ no pasan por $Q$, $R$, $N$, $P$, luego

a) En $\{Q, R, N\}$, respecto de $j$ y $ME$ y en virtud de $(N, Q\ ;\ M, J) = -1$ y $(Q, R\ ;\ E, J_1) = +1$, resulta $(R, N\ ;\ I_1, J_3) = -1$.

b) En $\{N, R, P\}$, respecto de $j$ y $ME$ y en virtud de $(N, R\ ;\ I_1, J_3) = -1$ y $(N, P; M, J) = +1$, resulta $(R, P\ ;\ I_2, J_4) = -1$.

c) En $\{R, Q, P\}$, respecto de $j$ y$ME$ y en virtud de $(Q, R\ ;\ E, J_1) = +1$ y $(R, P\ ;\ I_2, J_4) = -1$, resulta: $(P, Q\ ;\ M, J) = -1$.

*c. q. d.*

*Teorema* 1. — Si $M$ y $N$ son dos puntos distintos de una serie rectilínea de base $r$, el conjunto de todos los puntos de la misma, excluídos $M$ y $N$, quedan divididos por éstos en dos clases disjuntas no vacías

Demostración — En la recta $r$ existe otro punto $P$ distinto de $M$ y $N$ y un cuarto pnto $Q$ tal que

$$(1) \qquad (M, N\ ;\ P, Q) = -1$$

El punto $P$ diremos que es de la clase $\mathfrak{b}_1$ y $Q$ de la clase $\mathfrak{b}_2$. Otro punto $H$ distinto de los anteriores diremos que pertenece a $\mathfrak{b}_1$, si $(M, N\ ;\ P, H) = +1$ y a $\mathfrak{b}_2$ en caso contrario

Si $H \varepsilon \mathfrak{b}_1$, se verifica $(M, N; Q, H) = -1$. En efecto: si fuese $(M, N; Q, H) = +1$, de esta relación y de $(M, N; P, H) = +1$, resultaría por el (L. 3) $(M, N; P, Q) = +1$ en contradicción con (1). Si $H \varepsilon \mathfrak{b}_2$ se verifica $(M, N\ ;\ QH) = +1$ En efecto, de $(M, N; P, Q) = -1$ y $(M, N; P, H) = -1$, resulta por el (L. 2): $(M, N; Q, H) = -1$. De esta relación y de un modo análogo al anterior resulta $(M, N; P, H) = -1$. Luego, las dos clases $\mathfrak{b}_1$ y $\mathfrak{b}_2$ son disjuntas y todo punto de $r$ distinto de $M$ y $N$ pertenece a una de las clases.

Las clases $\mathfrak{b}_1$ y $\mathfrak{b}_2$ son independientes de los puntos $P$ y $Q$ empleados para definirlas En efecto: sean $H$ y $K$ otros dos puntos tales que $(M, N\ ;\ H, K) = -1$. A la clase definida por $H$ la representaremos por $\mathfrak{b}_1'$ y a la definida por $K$ por $\mathfrak{b}_2'$. Distinguiremos dos casos: 1º $(M, N\ ;\ H, P) = +1$ En este caso $H \varepsilon \mathfrak{b}_1$ y $(M, N\ ;\ K, P) = -1$; pues si fuese $(M, N\ ;\ K, P) = +1$, de esta relación y de la anterior se deduciría por el $L$ 3) que $(M, N\ ;\ H, K) = +1$, en contradicción con la hipótesis. Resulta, por tanto, que $K \varepsilon \mathfrak{b}_2$ Sea $X$ un punto cualquiera de $\mathfrak{b}_1'$ *e. e.* tal que $(M, N\ ;\ HX) = +1$ De esta relación y de $(M, N\ ;\ H, P) = +1$ resulta

$(L.3)$: $(M, N\ ;\ XP) = +1$, $e.e.$ $X \varepsilon \mathscr{C}_1$. Si $Y \varepsilon \mathscr{C}_2'$ $e.e.$ $(M, N\ ;\ H, Y) = -1$, por el mismo lema resulta $(M, N\ ;\ P, Y) = -1$, luego $Y \varepsilon \mathscr{C}_2$. Sea $Z$ un punto que pertenece a $\mathscr{C}_1$ $e.e.$ tal que $(M, N\ ;\ P, Z) = +1$, como antes resulta por el $(L.3)$ que $(M, N\ ;\ H, Z) = +1$, luego $Z \varepsilon \mathscr{C}_1'$. Análogamente si $T \varepsilon \mathscr{C}_2$, resulta que $T \varepsilon \mathscr{C}''$. Luego:

$$\mathscr{C}_1' = \mathscr{C}_1 \quad \text{y} \quad \mathscr{C}_2' = \mathscr{C}_2 .$$

2.º De un modo completamente análogo se demuestra que en la hipótesis $(M, N\ ;\ H, P) = -1$ se verifica

$$\mathscr{C}_1' = \mathscr{C}_2 \quad \text{y} \quad \mathscr{C}_2' = \mathscr{C}_1 .$$

*c. q. d.*

Definición 2 — Se llama *segmento proyectivo abierto,* al conjunto de todos los puntos de una (cualquiera) de las dos clases definidas por un par de puntos distintos de una recta. A estos puntos se les llama *extremos* del segmento. Se llama segmento proyectivo *cerrado* o simplemente *segmento proyectivo* al conjunto de todos los puntos de un segmento proyectivo abierto más sus extremos.

*Teorema 2.* — En todo segmento proyectivo $A\,C_1\,B$ existen infinitos puntos.

Demostración. — Supongamos que hemos demostrado la existencia de $n$ puntos $C_1, \dots, C_n$ que pertenecen al segmento $\overline{A\,C_1\,B}$, $e.e.$ tales que $(A, B\ ;\ C_1, C_i) = +1$ $(i = 2, \dots, n)$. Sea $C_j$ uno cualquiera de ellos y sea $(A, C_j\ ;\ B, C_k) = -1$ para $k = l_1, \dots, l_s$, $s \leqq n-1$. De $(A, C_j\ ;\ B, C_{l_1}) = -1$ resulta: $(A, C_{l_1}\ ;\ B, C_j) = +1$. Si $C_m$ es un punto tal que $(A, C_j\ ;\ B, C_m) = +1$, como $(A, B\ ;\ C_j\,C_1) = +1$, será, por $(O_2)$ : $(A, C_j\ ;\ B, C_{l_1}) = -1$ y por el $(L.3)$, $(A, C_j\ ;\ C_{l_1}\ C_m) = -1$, luego $(A, C_{l_1}\ ;\ C_j, C_m) = +1$ y de esta relación juntamente con $(A, C_{l_1}\ ;\ \overline{B, C_j}) = +1$, resulta por el $(L.3)$: $(A, C_{l_1}\ ;\ B, C_m) = +1$, luego en el segmento $A\,C_{l_1}$ que no contiene a $B$, existe por lo menos un punto menos (el $C_j$) de los $C_1, \dots C_m$ que en segmento $A\,C_j$ que no contiene a $B$. Repitiendo este proceso un número finito de veces (o más $s$ veces), obtendremos un segmento $A\,\overline{C_r}$ que no contiene a $B$, que no contiene a ninguno de los puntos $C_1, \dots, C_n$ distintos de $C_r$. Por el postulado $O_1$ existe un punto $C_{n+1}$ tal que $(A, C_r\ ;\ B, C_{n+1}) = -1$, luego $(A, B\ ;\ C_r\,C_{n+1}) = +1$, $e.e.$ $C_{n+1}$ pertenece al segmento $\overline{AC_{1_1}\ B}$ y es distinto de los $C_1, \dots, C_n$.

*c. q. d.*

Zaragoza, abril, 1946.